

ANUALIDADES ANTICIPADAS, VENCIDAS Y DIFERIDAS

Matemáticas Financieras

Bloque 3

El presente material recopila una serie de definiciones, explicaciones, ejemplos y ejercicios prácticos de autores especializados que te ayudarán a comprender los temas principales de este bloque.

Las marcas empleadas en la antología son única y exclusivamente de carácter educativo y de investigación, sin fines lucrativos ni comerciales.

Anualidades anticipadas, vencidas y diferidas

4. Anualidades anticipadas

En este tercer bloque conocerás las fórmulas aplicadas en cada situación financiera para determinar el valor de la renta, la tasa de interés y el plazo de la operación, así como su valor actual o presente y el monto futuro.

Asimismo, sabrás en qué situaciones se aplican las anualidades anticipadas, vencidas y diferidas, todos estos temas complementarán tus conocimientos en el ámbito personal y profesional.

Una anualidad es una serie de pagos generalmente iguales que se hacen en intervalos iguales. El término *anualidad* parece implicar que los pagos se efectúan cada año, sin embargo, esto no es necesariamente así, ya que los pagos pueden ser mensuales, quincenales, etcétera (Vidaurri, 2008).

Vidaurri (2008) afirma que son anualidades los siguientes rubros:

- El cobro quincenal del sueldo
- El pago mensual de un crédito hipotecario
- Los abonos mensuales para pagar una computadora adquirida a crédito
- El pago anual de la prima del seguro de vida
- Los dividendos semestrales sobre acciones
- Los depósitos bimestrales efectuados a un fondo de retiro

El concepto de anualidad es de gran relevancia en matemáticas financieras, ya que es frecuente que las transacciones comerciales impliquen una serie de pagos hechos en intervalos iguales, en vez de un pago único realizado al final del plazo (Vidaurri, 2008).



Los términos *renta*, *pago periódico*, *abono* u otros, pueden utilizarse en lugar de anualidad.

Al tiempo transcurrido entre dos pagos sucesivos se le conoce como *período de pago* o *período de renta*. El período de pago puede ser anual, semestral o mensual, entre otros (Vidaurri, 2008).

Al tiempo que transcurre entre el primer período de pago y último se le llama *plazo de la anualidad*.

1. Una persona compra un celular por el que pagará 24 mensualidades de \$275 cada una. Identifica la anualidad, el período de pago y el plazo de la anualidad.

Solución

La anualidad (pago periódico o abono) es de \$275. El período de pago es un mes y el plazo de la anualidad es de 24 meses.

De acuerdo con Vidaurri (2008) existen cuatro formas de clasificar las anualidades:

- a. Utilizando el tiempo existen las siguientes:
 - **Anualidad cierta:** es aquella en la que los pagos comienzan y terminan en fechas perfectamente definidas. Por ejemplo, al comprar un televisor a crédito en una tienda departamental se establecen de antemano las fechas de iniciación y terminación del crédito.
 - **Anualidad contingente:** es aquella en la cual la fecha del primer pago, la fecha del último pago o ambas dependen de algún suceso que se sabe que ocurrirá, pero no se sabe cuándo. Por ejemplo, el contrato de un seguro de vida determina que la suma asegurada se entregue al beneficiario del seguro en 12 pagos mensuales iguales. Se sabe que los pagos deben efectuarse al morir el asegurado, pero ¿cuándo va a morir?
- b. Usando los pagos o abonos como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:
 - **Anualidad vencida:** nombrada también *anualidad ordinaria*, es aquella cuyos pagos se efectúan al final de cada período de pago.
 - **Anualidad anticipada:** es aquella cuyos pagos se realizan al principio de cada período de pago.
- c. Empleando los intereses como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:
 - **Anualidad simple:** es aquella cuyo período de pago coincide con el período de capitalización de los intereses. Por ejemplo, hacer depósitos mensuales en una cuenta de ahorros que paga intereses capitalizables cada mes.
 - **Anualidad general:** es aquella cuyo período de pago no coincide con el período de capitalización de los intereses. Por ejemplo, cuando se realizan depósitos quincenales en una cuenta de ahorros cuyos intereses se capitalizan cada mes.
- d. Por último, si se utiliza el momento de iniciación o iniciación de la anualidad como criterio de clasificación, las anualidades pueden ser:

- **La anualidad inmediata** es en la que no existe aplazamiento alguno de los pagos, es decir, los pagos se hacen desde el primer período.
- **La anualidad diferida**, en ésta los pagos se aplazan por un cierto número de períodos. Por ejemplo, se compra hoy a crédito una impresora láser, que se pagará mediante 12 abonos mensuales y el primer pago se llevará a cabo tres meses después de la compra.

Los tipos de anualidades a estudiar en este bloque serán:

- Las anualidades ciertas, simples, anticipadas e inmediatas, conocidas simplemente como anualidades anticipadas.
- Las anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas, conocidas simplemente como anualidades vencidas.
- Las anualidades ciertas, simples, vencidas y diferidas, conocidas simplemente como anualidades diferidas.

Una anualidad anticipada se cubre al comienzo de cada período. Son ejemplos de anualidades anticipadas los pagos anuales (primas) de un seguro de vida, la renta de una casa u oficina, algunos planes de crédito que estipulan que los pagos deben efectuarse al comienzo de los períodos convenidos, etcétera (Vidaurri, 2008).

La anualidad es simple cuando el período de capitalización coincide con el período de pago. La anualidad es inmediata porque los pagos se inician en el mismo período en que la operación se formaliza.

Diagrama de tiempo de una anualidad anticipada



4.1. Monto y valor presente

El siguiente ejemplo muestra cómo se calcula el monto o valor futuro de una anualidad anticipada.

2. Se depositan \$3,000 al inicio de cada mes en un banco que paga 2% mensual capitalizable en forma mensual. ¿Cuál será el monto después de seis depósitos?

Solución

Si M representa el monto de la anualidad, se puede formar la siguiente ecuación:

$$M = 3,000 (1.02^6 + 1.02^5 + 1.02^4 + 1.02^3 + 1.02^2 + 1.02)$$

$$M = \$19,302.85$$

El valor presente P , de una anualidad se define como la suma de los valores presentes de todos los pagos.

El valor presente de la anualidad se puede obtener calculando el valor presente del monto, esto es:

$$C = M / (1 + i)^t = 19,302.85 / 1.02^6 = \$17,140.38$$

Cabe mencionar que, el valor presente de una anualidad anticipada tiene las mismas interpretaciones que el valor presente de una anualidad vencida.

3. Francisco deposita \$5,000 al inicio de cada mes en una cuenta de inversión. Si la tasa de interés es de 1% mensual capitalizable cada mes:
 - a. Obtén el monto al cabo de tres años.
 - b. ¿Cuál es el interés ganado en los tres años?
 - c. Calcula el valor presente de la anualidad.

Solución

$$a. M = A [(1 + i)^n - 1 / i] (1 + i)$$

$$M = 5,000 [(1 + 0.01)^{36} - 1 / 0.01] (1 + 0.01)$$

$$M = \$217,538.24$$

$$b. I = M - C = 217,538.24 - (5,000) (36) = \$37,538.24$$

$$c. P = A [1 - (1 + i)^{-n} / i] (1 + i)$$

$$P = 5,000 [1 - (1 + 0.01)^{-36} / 0.01] (1 + 0.01)$$

$$P = \$152,042.90$$

4.2. Cálculo de la renta

4. Dentro de seis años la compañía fabricante de sartenes La Olla Exprés, S.A. de C.V. necesitará \$7'000,000 para reemplazar maquinaria depreciada. A partir de este momento, ¿cuál será el importe del depósito trimestral que tendrá que hacer la empresa en un fondo de depreciación que paga 11.3% convertible cada trimestre para acumular dicha cantidad de dinero?

Solución

Debido a que se conoce el monto de una anualidad anticipada, es necesario despejar A (anualidad) de la siguiente ecuación:

$$M = A [(1 + i)^n - 1 / i] (1 + i)$$

$$A = Mi / [(1 + i)^n - 1] (1 + i)$$

$$A = (7'000,000) (0.113 / 4) / [(1 + 0.113 / 4)^{24} - 1] (1 + 0.113 / 4)$$

$$A = \$202,119.21$$

5. El beneficiario de una herencia puede optar por recibir \$320,000 de inmediato o recibir 40 pagos iguales cada cuatro meses, el primero de ellos se hace de inmediato. ¿Cuál será el valor del pago cuatrimestral si el dinero está invertido al 11.55% anual?

Solución

Se despeja A de la siguiente ecuación, ya que se conoce el valor presente de una anualidad vencida.

$$P = A [1 - (1 + i)^{-n} / i] (1 + i)$$

$$A = Pi / [1 - (1 + i)^{-n}] (1 + i)$$

$$A = (320,000) (0.1155 / 3) / [1 - (1 + 0.1155 / 3)^{-40}] (1 + 0.1155 / 3)$$

$$A = \$15,222.36$$

4.2.1. Aproximación de la tasa de interés

Dado que la tasa de interés se encuentra en el numerador y denominador en la fórmulas de monto, valor presente y anualidad o renta, no es posible despejar la tasa de interés, por lo que normalmente se utiliza para su cálculo el método de prueba y error a base de iteraciones sucesivas. Asimismo, otra forma de calcularlo es través de una calculadora financiera o un software financiero.

De acuerdo con Camargo (s.f.) podemos considerar el siguiente caso de aproximación de la tasa de interés:

6. ¿Cuál es la tasa de interés si efectúan seis depósitos trimestrales anticipados de \$25,000 para obtener un monto de \$178,550.21?

Solución

$$M = \$178,550.21$$

$$A = \$25,000$$

$$n = 6$$

Luego sustituyendo en la fórmula del monto de una anualidad anticipada:

$$M = A [(1 + i)^n - 1 / i] (1 + i)$$

$$\$178,550.21 = \$25,000 [(1 + i)^6 - 1 / i] (1 + i)$$

Después se simplifica:

$$\$178,550.21 / \$25,000 = [(1 + i)^6 - 1 / i] (1 + i)$$

$$7.1420084 = [(1 + i)^6 - 1 / i] (1 + i)$$

Ahora aplicando el método iterativo, que consiste en tratar de resolver la ecuación a través aproximaciones sucesivas:

$$\text{Si } i = 0.04, \text{ entonces } [(1 + 0.04)^6 - 1 / 0.04] (1 + 0.04) = 6.8982945$$

$$\text{Si } i = 0.055, \text{ entonces } [(1 + 0.055)^6 - 1 / 0.055] (1 + 0.055) = 7.2668938$$

$$\text{Si } i = 0.05, \text{ entonces } [(1 + 0.05)^6 - 1 / 0.05] (1 + 0.05) = 7.1420084$$

Por tanto $i = 0.05$ trimestral = 20% anual.

4.2.2. Aproximación al plazo

Se denomina una aproximación al plazo, ya que al despejar n de la fórmulas de monto o valor presente de una anualidad en ocasiones se genera un valor con números decimales, el cual es una aproximación al plazo, ya que este último en la práctica se utiliza en días, semanas, quincenas, meses, etc.

Ahora, si despejamos n de la fórmula del monto de una anualidad anticipada:

$$M = A [(1 + i)^n - 1 / i] (1 + i)$$

Tenemos:

$$n = \frac{\log \left[\frac{M \cdot i}{A(1+i)} + 1 \right]}{\log(1+i)}$$

Por otro lado, si despejamos n de la fórmula del valor presente de una anualidad anticipada:

$$P = A \left[1 - \frac{(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)$$

Tenemos:

$$n = \frac{\log \left[1 - \frac{P \cdot i}{A(1+i)} \right]}{\log(1+i)}$$

Dichas fórmulas se utilizarán de acuerdo con los datos con que se cuenten. Por ejemplo, de acuerdo con Vidaurri (2008) podemos considerar el siguiente caso de aproximación al plazo:

7. Una tienda de artículos fotográficos ofrece una videocámara, cuyo precio de contado es de \$9,785, en mensualidades anticipadas de \$886 cada una. Encuentre el número de pagos mensuales, si se carga 30% de interés compuesto cada mes.

Solución:

$$P = \$9,785$$

$$A = \$886$$

$$i = 30\% \text{ anual} = 2.5\% \text{ mensual}$$

$$n = \frac{\log \left[1 - \frac{P \cdot i}{A(1+i)} \right]}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log \left[1 - \frac{(9,785)(0.025)}{(886)(1+0.025)} \right]}{\log(1+0.025)}$$

$$n = 12.70999697 \text{ pagos mensuales}$$

Al obtener como resultado 12.70999697 meses se dice que es aproximado a 13 meses. Sin embargo, en la práctica serían 12 mensualidades de \$886 y una treceava por \$631.31. Donde esta última se cál-

cula representado al valor del pago efectuado al inicio del mes trece con x y se toma como fecha focal el momento actual, formando la siguiente ecuación de valor:

$$9,785 = 886 \left[\frac{1 - (1 + 0.025)^{12}}{0.025} \right] (1 + 0.025) + \frac{x}{(1 + 0.025)^{12}}$$

$$x = \$631.31$$

5. Anualidades vencidas u ordinarias

Las anualidades ciertas, simples, vencidas e inmediatas son una de las más utilizadas en el mundo financiero. Es común referirse a este tipo de anualidades como *anualidades vencidas u ordinarias* (Vidaurri, 2008). Las anualidades vencidas son aquellas que se pagan al finalizar el período en el que se formalizó la operación (Camargo, s.f.).

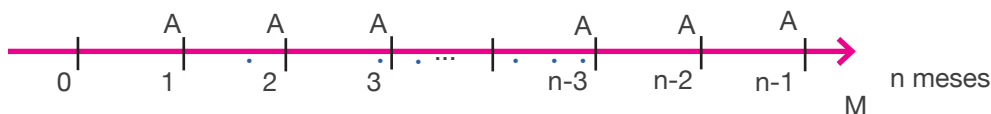


5.1. Monto y valor presente

El monto de una anualidad vencida es el valor acumulado de una serie de pagos iguales efectuados al final de cada período de pago. A continuación se presenta un ejemplo del cálculo del monto de una anualidad vencida.

8. Supón que se depositan \$5,000 al final de cada mes en un banco que paga una tasa de interés de 1.5% mensual capitalizable cada mes. ¿Cuál será el monto al cabo de seis meses?

Diagrama de tiempo de una anualidad anticipada



donde M corresponde al monto de la anualidad.

Observa que el cero en el diagrama corresponde al momento actual o presente y coincide con el inicio del mes 1. El número 1 marcado en el diagrama corresponde al final del mes 1 y coincide con el inicio del mes 2 y así sucesivamente.

A este diagrama, y al que viste en el tema de *Anualidad anticipada*, se le conoce como *diagrama de flujo de efectivo*. Se denominan flujos de efectivo a las entradas y salidas de dinero. En este ejemplo se tiene un flujo de efectivo de \$5,000 mensuales durante seis meses.

Debido a que los depósitos se realizan al final de cada mes, los primeros \$5,000 ganarán intereses por cinco meses, los segundos \$5,000 ganarán intereses por cuatro meses, etcétera. El último depósito hecho al final del sexto mes no gana intereses. Ahora dado que, el monto de la anualidad es la suma de todos los depósitos mensuales y su correspondiente interés compuesto, acumulado hasta el término del plazo. Si la fecha focal se localiza al final del sexto mes, el monto de la anualidad está dado por la siguiente ecuación de valor:

$$M = 5,000(1.015)^5 + 5,000(1.015)^4 + 5,000(1.015)^3 + 5,000(1.015)^2 + 5,000(1.015) + 5,000$$

Factorizando:

$$M = 5,000[(1.015)^5 + (1.015)^4 + (1.015)^3 + (1.015)^2 + (1.015) + 1]$$

$$M = \$31,147.75$$

El interés compuesto ganado por la anualidad es la diferencia entre el monto y el capital total depositado:

$$\text{Interés ganado} = 31,147.75 - (5,000)(6) = \$1,147.75$$

Cuando el número de pagos o depósitos es muy grande, el método anterior para obtener el monto de la anualidad resulta muy laborioso. Enseguida se deducirá la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad cierta, simple, vencida e inmediata.

Considera una anualidad vencida en donde A es el pago o depósito hecho al final de cada uno de n períodos. Sea i la tasa de interés por período, expresada en forma decimal, y M el monto de la anualidad.

Si te das cuenta, en el ejemplo anterior estamos hablando de una sucesión geométrica: la determinación del monto.

Por lo que la fórmula general para obtener el monto o valor futuro de una anualidad vencida es:

$$M = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

9. Con base en esta fórmula, resuelve el ejemplo anterior.

Solución

$A = 5,000$ pesos mensuales

$i = 1.5\%$ mensual = 0.015 por mes

$n = 6$ meses

$$M = 5,000 [(1 + 0.015)^6 - 1 / 0.015] = 5,000 [1.093443264 - 1 / 0.015]$$

$$M = \$31,147.75$$

10. El padre de un niño de siete años empieza a ahorrar para que su hijo pueda estudiar una carrera universitaria. Planea depositar \$3,500 en una cuenta de ahorro al final de cada mes durante los próximos 11 años. Si la tasa de interés es de 8.4% anual:

- ¿Cuál será el monto de la cuenta al cabo de 11 meses?
- ¿De cuánto serán los intereses?

Solución

a. Los siguientes datos son:

$$A = 3,500$$

$$i = 8.4\% \text{ anual} = 0.7\% \text{ mensual}$$

$$n = (11 \text{ años}) (12 \text{ meses/año}) = 132 \text{ meses}$$

$$M = 3,500 [(1 + 0.007)^{132} - 1 / 0.007] = 3,500 [2.511251 - 1 / 0.007]$$

$$M = \$755,625.50$$

b. En 11 años el padre deposita un total de $(\$3,500 \text{ por mes})(132 \text{ meses}) = \$462,000$

Por tanto, el interés ganado será:

$$I = 755,625.50 - 462,000$$

$$I = 293,625.50$$

11. Con referencia al ejemplo anterior, supón que el depósito de \$3,500 mensuales se efectúa únicamente por cinco años, el resto de tiempo se depositan \$4,000 mensuales con el fin de compensar la inflación. Calcula el monto final y el interés ganado.

El problema se resuelve en dos partes:

Primera parte

Se calcula el monto de los \$3,500 mensuales por cinco años (60 meses)

$$M_1 = 3,500[(1 + 0.007)^{60} - 1 / 0.007] = 259,868.14$$

Segunda parte

Al final de los cinco años se tiene un monto, llamado M_1 , de \$259,868.14

Para obtener el monto final M , se forma la siguiente ecuación de valor, tomando como fecha focal el final del mes 132.

$$M = 259,868.14(1 + 0.007)^{72} + 3,500 [(1 + 0.007)^{72} - 1 / 0.007]$$

$$M = 429,412.73 + 326,212.73$$

$$M = \$755,625.46$$

En 11 años, el padre deposita un total de (\$3,500 por mes) (60 meses) + (4,000) (72 meses). Por consiguiente, el interés ganado será:

$$I = 755,625.46 - 498,000$$

$$I = 257,625.46$$

Hasta este momento se ha determinado el valor futuro de una anualidad vencida. Ahora se abordará el problema de agregar el valor presente o valor actual de una anualidad vencida. Repitiendo el diagrama, encontrarás que el valor presente lo representa el número cero, esto significa que es el comienzo del plazo.

Diagrama de tiempo de una anualidad anticipada



El valor presente de una anualidad se define como la suma de los valores presentes de todos los pagos.

- Supón que una persona va a liquidar una deuda mediante cuatro pagos mensuales vencidos de \$1,183.72 cada uno, que incluyen intereses al 3% mensual con capitalización cada mes. Se desea obtener la suma del valor presente de la anualidad.

Solución

Con base en el diagrama visto anteriormente, si la fecha focal se localiza en el momento actual, entonces se puede formar la siguiente ecuación de valor:

$$P = 1,183.72/1.03 + 1,183.72/1.03^2 + 1,183.72/1.03^3 + 1,183.72/1.03^4$$

La expresión también se puede escribir como:

$$P = 1,183.72(1.03)^{-1} + 1,183.72(1.03)^{-2} + 1,183.72(1.03)^{-3} + 1,183.72(1.03)^{-4}$$

$$P = \$4,400$$

El valor presente o actual de cuatro pagos mensuales de \$1,183.72 cada uno es \$4,400. Se podría decir que \$4,400 es el capital solicitado en préstamo por el deudor.

El valor presente de una anualidad admite dos interpretaciones:

Primera interpretación. Supón que en lugar de tener una deuda de \$4,400, se tiene un capital de \$4,400, que se depositará en una cuenta que paga 3% mensual capitalizable cada mes. Entonces, el valor presente se interpreta de la siguiente forma: \$4,400 depositados al 3% mensual capitalizable cada mes producirán un monto exactamente igual que el obtenido al depositar \$1,183.72 cada mes, durante cuatro meses:

$$M = 4,400(1 + 0.03)^4 = \$4,952.24$$

$$M = 1,183.72[(1 + 0.03)^4 - 1] / 0.03 = \$4,952.24$$

Lo anterior indica que el valor presente de una anualidad se obtiene mediante la fórmula de interés compuesto, al calcular el valor presente del monto de la anualidad.

Segunda interpretación. El valor presente de una anualidad se puede interpretar como la cantidad que se debe invertir en este momento para efectuar cierto número de retiros en el futuro, exactamente iguales a la anualidad, esto es, si una persona invierte en este momento \$4,400 al 3% mensual capitalizable cada mes, entonces podrá retirar \$1,183.72 cada mes, durante cuatro meses, al final de los cuales la cuenta estará en ceros.

La fórmula general de una anualidad vencida es la siguiente:

$$P = A[(1 - (1 + i)^{-n}) / i]$$

13. ¿Cuál es el valor presente de \$10,000 depositados en una cuenta final de cada trimestre durante cuatro años, si la tasa de interés es de 14% capitalizable en forma trimestral?

Solución

$$A = 10,000$$

$$i = 14\% \text{ anual} = 14/4 = 3.5\% \text{ trimestral}$$

$$n = (4 \text{ años}) (4 \text{ trimestres por año}) = 16 \text{ trimestres}$$

$$P = 10,000 [(1 - (1+0.035)^{-16}) / 0.035]$$

$$P = 10,000 ((1 - 0.5767059117) / 0.035)$$

$$P = \$120,941.17$$

14. Raquel desea jubilarse en este año y cree que una mensualidad de \$18,000 durante los siguientes 20 años será suficiente para vivir bien. Si el fondo de retiro le da 9.5% anual capitalizable, ¿cuánto dinero debe tener ahorrado para retirar la cantidad deseada?

Solución

$$A = 18,000$$

$$i = 9.5\% \text{ anual} = (9.5/12)\% \text{ mensual}$$

$$n = 240 \text{ meses}$$

$$P = 18,000 [(1 - (0.095/12)^{-240}) / (0.095/12)]$$

$$P = 18,000(1 - 0.1506917942 / 0.00791666666)$$

$$P = \$1'931,058.66$$

\$1'931,058.66 depositados al 9.5% capitalizable cada mes producirán 240 pagos mensuales de \$18,000 cada uno. La diferencia entre la cantidad total recibida a lo largo de los 20 años y el valor actual es el interés compuesto ganado.

$$\text{Interés compuesto ganado} = (18,000)(240) - 1'931,058.66$$

$$\text{Interés compuesto ganado} = 4'320,000 - 1'931,058.66$$

$$\text{Interés compuesto ganado} = 2'388,941.34$$

5.2. Cálculo de la renta

Para realizar el cálculo de la renta o pago, solo necesitamos despejar A de las fórmulas del monto y valor presente de una anualidad vencida, las cuales podrás utilizarlas de acuerdo con los datos que se te presenten en cada situación.

Ahora, si despejamos A de la fórmula del monto de una anualidad anticipada:

$$M = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$$

Tenemos:

$$A = \left[\frac{M \cdot i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Por otro parte, si despejamos A de la fórmula del valor presente de una anualidad anticipada:

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Tenemos:

$$A = \left[\frac{P \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} \right]$$

5.2.1. Aproximación de la tasa de interés

15. Mariela ha depositado \$600 al final de cada quincena en una cuenta de ahorros. Al cabo de dos años, se tiene un monto de \$31,808.93. ¿Qué tasa nominal capitalizable ha ganado cada quincena?

Solución

El despeje de la tasa de interés es imposible. La única forma de resolver un problema donde se pide calcular la tasa de interés de una anualidad es mediante el procedimiento conocido como prueba y error.

El método de prueba y de error consiste en probar valores relativamente arbitrarios de i en la fórmula correspondiente, ya sea la del monto o la del valor presente, hasta que se llegue a un valor aceptable para i .

Al ensayar diferentes valores de i se llega al siguiente resultado, el cual es una buena aproximación:

$$31,808.93 = 600 [(1+i)^{48} - 1 / i]$$

$$i = 0.42\% \text{ quincenal} = 10.08\% \text{ anual}$$

5.2.2. Aproximación al plazo

16. ¿Cuántos depósitos quincenales de \$1,602.77 cada uno se deben hacer para acumular un total de \$100,000, si se ganan intereses de 11% capitalizable cada quincena?

Solución

En este problema se conoce la anualidad y el monto de ésta y se pide calcular n , la cual se calculará de la siguiente forma:

$$n = \log[(Mi/A)+1] / \log(1+i)$$

$$n = \log[(((100,000)(0.11/24))/1,602.77)+1] / \log(1+0.11/24)$$

$$n = \log 1.285963259 / \log 1.004583333$$

$$n = 55 \text{ depósitos quincenales}$$

5.3. Hipotecas

17. Una persona decide comprar una casa por un costo \$1,100,000, del cual da un enganche del 15% y el resto lo paga con un crédito hipotecario contratado en un banco, donde pacta una tasa del 9.65% a un plazo de 20 años. ¿Cuál es la mensualidad que deberá pagar?

Solución:

Obtenemos el financiamiento dado por el banco del 85%, que es igual a \$935,000.

Luego, aplicamos la fórmula de una anualidad vencida considerando el valor presente:

$$A = \frac{P \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$A = \frac{(935,000)(0.008041666)}{1 - (1+0.008041666)^{-240}}$$

$$A = \$8,807.22$$

Por tanto, esta persona deberá realizar pagos mensuales de \$8,807.22 durante 20 años.

Cabe mencionar que en la práctica, las instituciones financieras en México al adquirir un crédito hipotecario te cobran: la comisión por apertura del crédito, el seguro de vida, seguro de daños, entre otros.

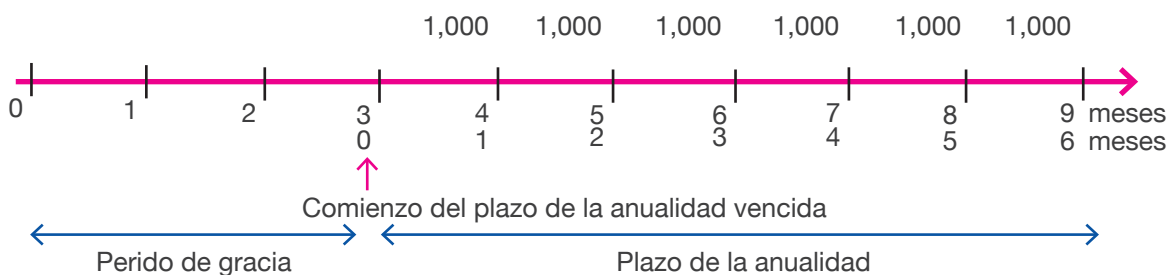
6. Anualidades diferidas

Una anualidad diferida es aquella cuyos pagos comienzan después de transcurrido un intervalo determinado desde el momento en que la operación quedó formalizada, a ésta se le nombra *momento inicial o de convenio*.

Las anualidades diferidas también pueden ser analizadas como vencidas o anticipadas (Vidaurri, 2008).

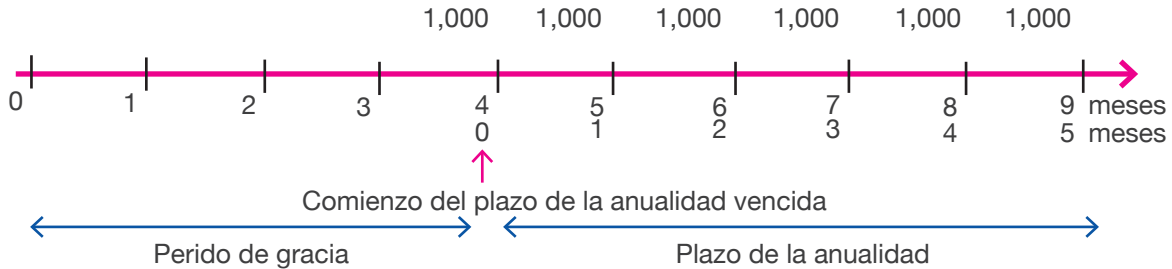


El intervalo que transcurre entre el momento inicial y el inicio de los pagos o depósitos se llama *período de gracia* o *período de diferimiento*. El período de gracia se mide utilizando como unidad de tiempo el correspondiente a los períodos de pago. Por ejemplo, si dentro de cuatro meses se hará el primer pago de una anualidad vencida de \$1,000 mensuales, cuyo plazo es de seis meses, se tendrá el siguiente diagrama de tiempo:



En este ejemplo el período de gracia es de cuatro meses, y el final del tercer mes coincide con el comienzo del plazo de la anualidad vencida, que es de seis meses.

Si la anualidad del ejemplo anterior se considerara anticipada, entonces el diagrama de tiempo sería el siguiente:



Para resolver problemas de anualidades diferidas no es necesario deducir nuevas fórmulas, ya que éstas pueden ser tratadas como anualidades vencidas o anticipadas.

Mientras transcurre el período de gracia puede ocurrir una de las siguientes situaciones:

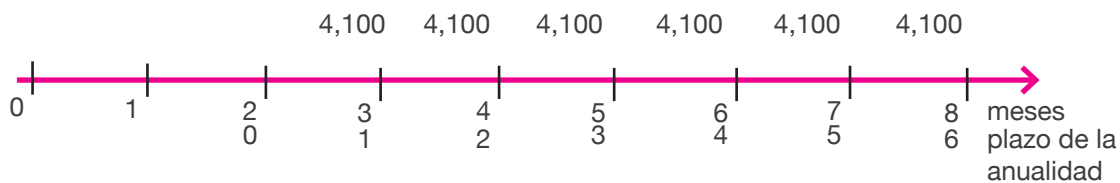
- a. Que al final de cada período de pago se liquiden los intereses generados por el capital original en el período. En este caso, se dice que hay servicio de intereses. Al llevarse a cabo esta situación, el capital original permanece constante todo el período de gracia, de tal manera que el valor presente de la anualidad es igual al capital original.
- b. Que los intereses ganados dentro del período de gracia se capitalicen. En este caso, el valor presente de la anualidad será igual al capital original más los intereses capitalizados.
- c. Que el período de gracia genere ningún tipo de interés.

En la mayor parte de las situaciones reales se lleva a cabo la opción del inciso b.

6.1. Monto y valor presente

18. Vania compra una laptop mediante el pago de seis mensualidades sucesivas de \$4,100 cada una, pagando la primera tres meses después de la compra.

¿Cuál es el precio de contado de la computadora, si se está cobrando una tasa de interés de 33% capitalizable cada mes?, ¿cuánto se paga de intereses?



El período de gracia es de tres meses y el plazo de la anualidad de seis meses.

Solución 1

Si se toma como fecha focal el comienzo del plazo de la anualidad, entonces se tiene la siguiente ecuación de valor.

$$P(1 + 0.33/12)^2 = 4,100 [(1 - (1+0.33/12)^{-6}) / (0.33/12)]$$

$$1.05575625 P = 22,395.70379$$

$$P = 22,395.70379 / 1.05575625$$

$$P = 21,213$$

El interés pagado por el uso del crédito fue:

$$I = (4,100)(6) - 21,213 = \$3,387$$

Solución 2

Tomando como fecha focal el momento inicial o de convenio, se calcula el valor presente de la anualidad, el cual queda ubicado al principio del período en que se efectúa el primer pago, es decir, en el segundo mes del plazo total de la anualidad. Posteriormente, esta cantidad se traslada al momento inicial o de convenio. La ecuación de valor es el seguimiento:

$$P = 4,100[(1 - (1+(0.33/12))^{-6}) / (0.33/12)](1 + (0.33/12))^{-2}$$

$$P = \$21,213$$

De esta forma podemos deducir otra la fórmula para calcular el valor presente de una anualidad diferida cuando los intereses se capitalizan durante el período de gracia:

$$P = A \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i(1+i)^k}$$

donde k es el tiempo diferido o período de gracia

6.2. Cálculo de la renta

19. La Sr. Martínez realiza la compra de material para construcción por la cantidad de \$250,000 aprovechando la promoción para pagar al inicio del tercer mes después de su compra con una tasa del 1.5% mensual capitalizable cada mes después de su período de gracia. ¿Cuál será la mesualidad que deberá pagar el Sr. Martínez si acuerda pagar su compra en 12 mensualidades?

Solución:

Ya que los intereses no se capitalizan durante el período de gracia, utilizamos la fórmula siguiente:

$$A = \frac{P \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

$$A = \frac{(935,000)(0.008041666)}{1 - (1 + 0.008041666)^{-240}}$$

$$A = \$8,807.22$$

Por tanto, el Sr. Martínez deberá pagar \$22,581.28 mensuales durante 1 año.

Por otra parte, cuando los intereses se capitalizan durante el período de gracia podemos utilizar para su cálculo de la renta la fórmula:

$$A = \frac{P \cdot i (1+i)^k}{1 - (1+i)^{-n}}$$

6.2.1. Aproximación de la tasa de interés

Para el cálculo de la tasa de interés de las anualidades diferidas, cuando los intereses se capitalizan durante el período de gracia; si contamos con los datos de valor presente, anualidad o pago, número de períodos y tiempo diferido, podemos plantear la siguiente ecuación equivalente:

$$P(1+i)^k = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

Luego, sustituimos los valores dados simplificando la ecuación hasta el mínimo posible.

Y finalmente, aplicamos el método iterativo, que consiste en tratar de resolver la ecuación a través aproximaciones sucesivas, tal como los realizamos en las anualidades anticipadas y vencidas.

6.2.2. Aproximación al plazo

Para realizar el cálculo del plazo en las anualidades diferidas, cuando los intereses se capitalizan durante el período de gracia, podemos utilizar fórmulas directas.

Cuando queremos conocer el número de períodos es:

$$n = \frac{\log \left[\frac{A}{A - P^*i(1+i)^k} \right]}{\log(1+i)}$$

Y cuando queremos conocer el tiempo diferido o período de gracia:

$$n = \frac{\log \left[A \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{P^*i} \right) \right]}{\log(1+i)}$$

REFERENCIAS

Camargo, A., Pompa, M. R./UNAM. (s.f.). *Licenciatura en Contaduría. Matemáticas financieras*. Recuperado de http://fcasua.contad.unam.mx/apuntes/interiores/docs/20172/contaduria/1/apunte/LC_1154_14116_A_MatematicasFinancieras.pdf

Vidaurri, H. (2008). *Matemáticas financieras*. (4ª ed.). México: Cengage Learning.