UIN UNIVERSIDAD INSURGENTES

CENTRO DE GRAVEDAD Y CENTROIDE

Estática

Bloque 4

EA0420

El presente material recopila una serie de definiciones, explicaciones, ejemplos y ejercicios prácticos de autores especializados que te ayudarán a comprender los temas principales de este bloque.

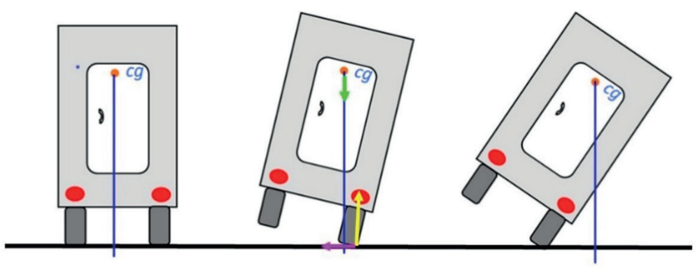
6. Centros de gravedad y centroides

Un cuerpo está compuesto por un número infinito de partículas de tamaño diferente, y por tal razón si el cuerpo se ubica dentro de un campo gravitatorio, entonces cada una de estas partículas tendrá un peso *dW* (por sus siglas en inglés *weight*). Estos pesos formarán un sistema de fuerzas aproximadamente paralelas, y la fuerza resultante de este sistema es el peso total del cuerpo, la cual pasa a través de un punto llamado centro de gravedad *G* (Hibbeler, 2010).

Con base en lo anterior, es posible definir el centro de gravedad ***G*** de un cuerpo como un punto en donde se concentra el peso de un cuerpo, es decir, el punto en el que se encuentra aplicada la resultante de todas las fuerzas gravitatorias que actúan sobre el cuerpo.

Por ejemplo, en la **Figura 1** se puede observar la representación de la fuerza W, con respecto al eje de referencia del auto. Si el centro de gravedad se ubica en un punto adecuado, las fuerzas brindan un equilibrio estable al cuerpo. En caso contrario, el resultado es la inestabilidad e inclinación del cuerpo.

Figura 1. Efectos del centro de gravedad en un cuerpo



Fuente: Zapata (2019).

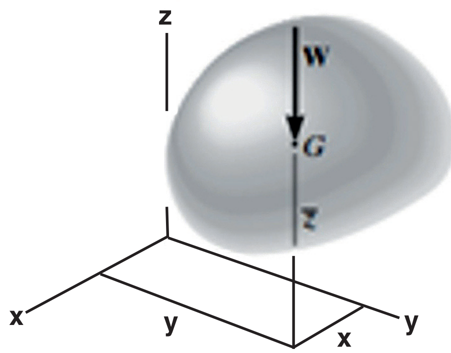
Ahora bien, el peso de un cuerpo es la suma de los pesos de todas las partículas, es decir:

$$+\downarrow F_R = \sum F_z; \qquad W = \int dW$$

De acuerdo con Hibbeler (2010), la ubicación del centro de gravedad, medida desde el eje ***y***, se determina al igualar el momento de ***W*** con respecto al eje ***y*** (**Figura 2**), con la suma de los momentos de los pesos de las partículas con respecto a ese mismo eje. Si ***dW*** se ubica en el punto $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ (**Figura 3**), entonces:

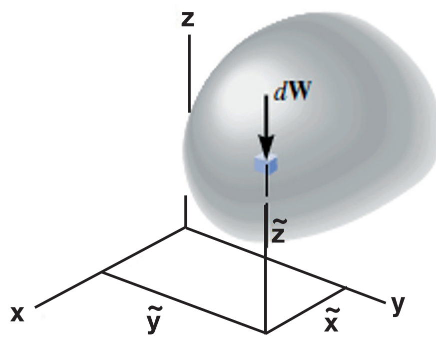
$$(M_R) = \sum M_y; \qquad \tilde{x}W = \int \tilde{x}\,dW$$

Figura 2. Centro de gravedad



Fuente: Hibbeler (2010, p. 447).

Figura 3. Ubicación del peso



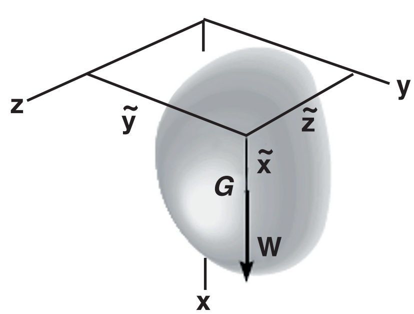
Fuente: Hibbeler (2010, p. 447).

De la misma manera, si se suman los momentos con respecto al eje x:

$$(M_R)_x = \sum M_x; \qquad \tilde{y}W = \int \tilde{y}dW$$

Por último, imagina que el cuerpo está fijo dentro del sistema de coordenadas y este sistema se gira 90° con respecto al eje ***y*** (**Figura 4**).

Figura 4. Ubicación del peso coordenadas eje y



Fuente: Hibbeler (2010, p. 447).

Entonces, la suma de los momentos con respecto al eje ***y*** es:

$$(M_R)_y = \sum M_y; \qquad \tilde{z}W = \int \tilde{z}dW$$

Por lo tanto, para encontrar el valor de las coordenadas de la ubicación del centro de gravedad ***G*** en un plano tridimensional con respecto a los ***x***, ***y*** y ***z*** se expresa que:

$$\tilde{x} = \frac{\int \tilde{x}dW}{\int dW} \qquad \tilde{y} = \frac{\int \tilde{y}dW}{\int dW} \qquad \tilde{z} = \frac{\int \tilde{z}dW}{\int dW}$$

Aquí

$\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}, \tilde{\boldsymbol{z}}$ son las coordenadas centrales de cada eje ***x***, ***y*** y ***z*** del centro de gravedad ***G***.

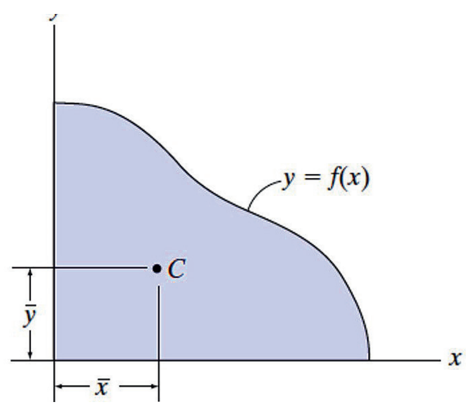
$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ son las coordenadas de cada partícula en el cuerpo.

6.1. Centroides de superficies planas

El centroide es un concepto que alude a la ubicación del centro geométrico de un cuerpo, es decir, cuando el cálculo de un cuerpo se refiera únicamente a una forma geométrica se utilizará el término *centroide*. Los cálculos relacionados con los centroides se clasifican en tres categorías, según se represente la forma del cuerpo en cuestión por una línea, una superficie o un volumen (Meriam y Kraige, 1999).

Para calcular el centroide de una figura plana, recurrimos al cálculo del *centroide* de un área.

Figura 5. Centroide de un área



Fuente: Hibbeler (2010, p. 450).

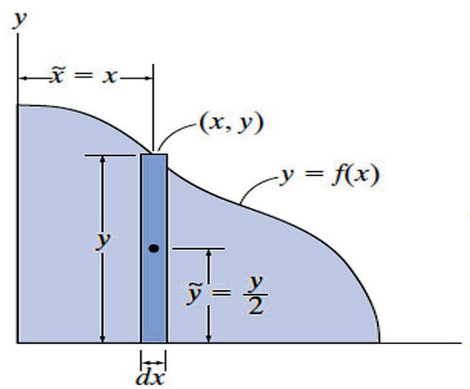
Por tanto, si un área se encuentra en el plano ***x-y*** y está delimitada por la curva ***y* = *f* (*x*)**, como se muestra en la **Figura 5**, entonces su centroide pertenecerá a este plano y podrá determinarse a partir del promedio ponderado de todos los elementos del peso que componen el cuerpo.

Dicho promedio se obtiene a través de las siguientes integrales:

$$\tilde{x} = \frac{\int_A \tilde{x} dA}{\int_A dA} \qquad \tilde{y} = \frac{\int_A \tilde{y} dA}{\int_A dA}$$

Estas integrales pueden evaluarse con una integración simple si se usa una franja rectangular como elemento de área diferencial; por ejemplo, si se utiliza una franja vertical (**Figura 6**), el área del elemento es $dA = y\,dx$, y su centroide se localiza en $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = y/2$.

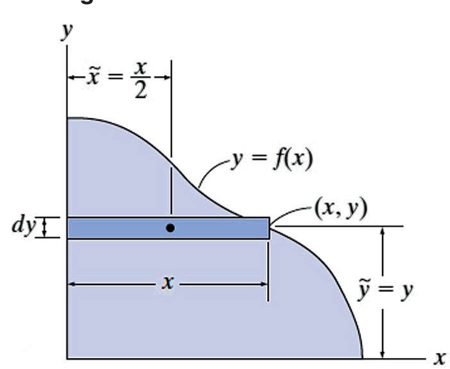
Figura 6. Centroide de un área



Fuente: Hibbeler (2010, p. 450).

Si se considera una franja horizontal (**Figura 7**), entonces $dA = xdy$, y su centroide se ubica en $\tilde{x} = x/2$ y $\tilde{y} = y$ (Hibbeler, 2010, p. 450).

Figura 7. Centroide de un área



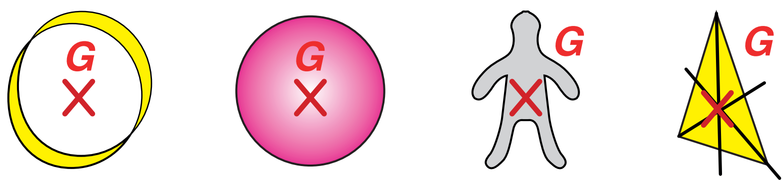
Fuente: Hibbeler (2010, p. 450).

6.2. Centroides para diferentes sistemas de fuerzas

Para calcular el centroide de diferentes sistemas de fuerzas, recurrimos al cálculo del centro de masa C_m, a fin de estudiar la respuesta dinámica o el movimiento acelerado de un cuerpo.

El centro de masa es una posición definida en relación con la distribución de la materia de un cuerpo físico real. Dicha posición coincidirá con el centroide, si la densidad del material es la misma en todos los puntos, mientras que, si la densidad varía de unos puntos a otros, aquellos no corresponderán, en general (Meriam y Kraige, 1999).

Figura 8. Centro de masa de un cuerpo



Esta ubicación puede determinarse a partir de la suma vectorial ponderada de los vectores de posición, la cual apunta al centro de masa de cada objeto en un sistema. Lo anterior se expresa de la siguiente manera:

$$\tilde{x} = \frac{\int \tilde{x} dm}{\int dm} \qquad \tilde{y} = \frac{\int \tilde{y} dm}{\int dm} \qquad \tilde{z} = \frac{\int \tilde{z} dm}{\int dm}$$

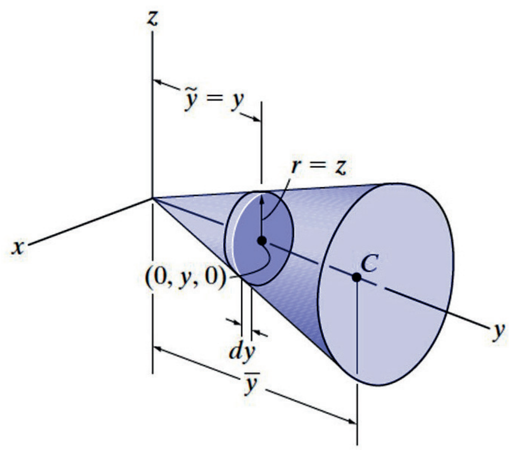
Ahora bien, si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, entonces su densidad ***p*** (ro) será constante. Por lo tanto, un elemento diferencial de volumen ***dV*** tiene una masa ***dm* = *pdV***. Al sustituir, se obtienen fórmulas que localizan el *centroide* ***C*** o el centro geométrico del cuerpo a través de la siguiente expresión:

$$\tilde{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dA} \qquad \tilde{y} = \frac{\int_V \tilde{y} dV}{\int_V dV} \qquad \tilde{z} = \frac{\int_V \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$

Estas ecuaciones representan un equilibrio de los momentos del volumen del cuerpo. De tal modo, si el volumen posee dos planos de simetría, entonces su centroide debe descansar a lo largo de la línea de intersección de estos dos planos.

Revisemos el siguiente ejemplo. En la **Figura 9** se muestra un cono que tiene un centroide que se encuentra sobre el eje ***y*** de modo que $\tilde{x} = \tilde{z} = 0$. La ubicación $\tilde{y}$ puede encontrarse con una integración simple al elegir un elemento diferencial representado por un disco delgado de grosor ***dy*** y un radio ***r* = *z***. Su volumen es $dV = \pi z^2\ dy = \pi z^2$ y su centroide se encuentra en $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = 0$.

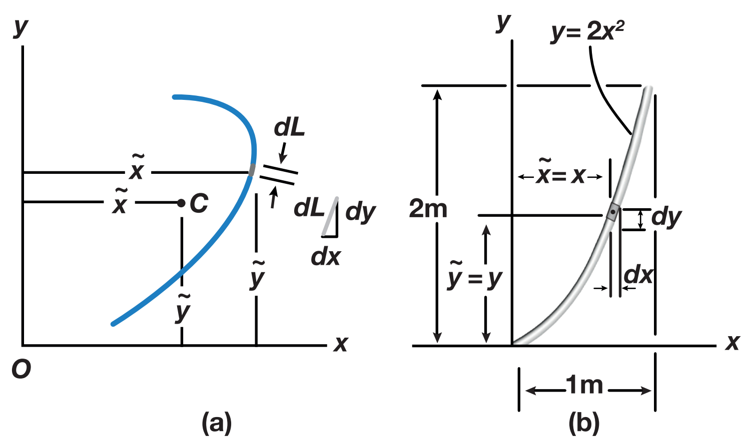
Figura 9. Equilibrio del cono sobre el eje y



Fuente: Hibbeler (2010, p. 449).

Otro caso a analizar es el centroide de un segmento de línea (o barra) que pertenece al plano ***x*** y ***y***, el cual puede describirse mediante una curva delgada **y = f(x)** (**Figura 10**).

Figura 10. Localización de centroide



Fuente: Hibbeler (2010, p. 451).

En este caso, el centroide está determinado por:

$$\tilde{x} = \frac{\int_L \tilde{x} dV}{\int_L dV} \qquad \tilde{y} = \frac{\int_L \tilde{y}\, dl}{\int_L dL}$$

Donde la longitud del elemento diferencial está dada por el teorema de Pitágoras: ***dL=*** $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$, que también se puede escribir así:

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dx^2}$$

$$= \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right) dx$$

O bien

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 dy^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2 dy^2}$$

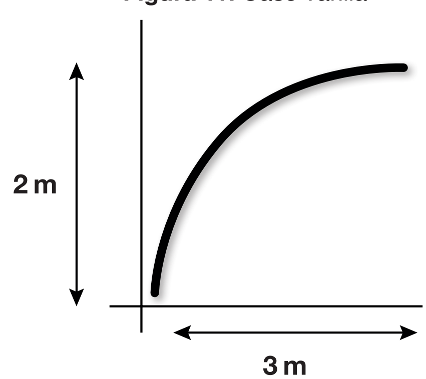
$$= \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\right) dy$$

Cualquiera de estas expresiones puede usarse; sin embargo, para su aplicación debe seleccionarse aquella que implique una integración más sencilla. Por ejemplo, considera la carga de la **Figura 10b**, definida por $y = 2x^2$, la longitud del elemento es $dL = \sqrt{(1 + (dy/dx)^2}\ dx$ y como $dy/dx = 4x$, entonces $dL = \sqrt{1 + (4x)^2}\, dx$. El centroide para este elemento se localiza en $\tilde{x} = x$ y $\tilde{y} = y$.

Revisemos un ejemplo.

Encontrar el centroide de una varilla doblada, que se muestra en la **Figura 11**, cuya ecuación es $x = y^3$.

Figura 11. Caso varilla



Solución:

Usando el principio de la diferencial con respecto a que es una barra se usa ***dL***, con lo cual tenemos:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dL_x = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dy}\right)^2}$$

Sabiendo que $x = y^3$, se sustituye en dx y al usar la diferencial se tiene $3y^2$

$$dL = \sqrt{(3y^2)^2 + (1)^2}$$

Y usando la fórmula de la integral

$$\tilde{x} = \frac{\int_0^3 y^3 \sqrt{(3y^2) + (1)^2}}{\int_0^3 \sqrt{(3y^2) + (1)^2}} = \frac{729}{28} = 26.03 \text{ m}$$

$$\tilde{y} = \frac{\int_0^2 y \sqrt{(3y^2)^2 + (1)^2}}{\int_0^2 \sqrt{(3y^2)^2 + (1)^2}} = \frac{24}{12} = 2 \text{ m}$$

6.3. Centroides de áreas de superficies planas compuestas

Un *cuerpo compuesto* consiste en una serie de cuerpos “más simples” conectados, los cuales pueden ser rectangulares, triangulares, semicirculares, etcétera. A menudo, un cuerpo de este tipo puede ser seccionado o dividido en partes componentes y, si se conocen el peso y la ubicación de cada una de las partes, entonces es posible eliminar la necesidad de la integración para determinar el centro de gravedad de todo el cuerpo. Por lo tanto, la ubicación del centroide de un área de superficies planas compuestas con respecto a los ***x***, ***y*** y ***z*** se convierten en:

$$\tilde{x} = \frac{\sum \tilde{x} W}{\sum W} \qquad \tilde{y} = \frac{\sum \tilde{y} W}{\sum W} \qquad \tilde{z} = \frac{\sum \tilde{z} W}{\sum W}$$

Aquí:

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ representan las coordenadas en el centro de gravedad ***G*** del cuerpo compuesto.

$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ representan las coordenadas del centro de gravedad de cada parte componente del cuerpo.

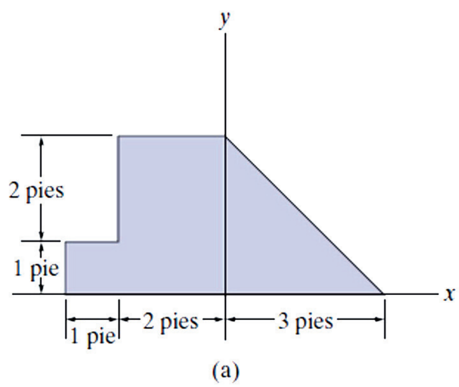
$\sum W$ es la suma de los pesos de todas las partes componentes del cuerpo, o simplemente el peso total del cuerpo.

Cuando el cuerpo tiene densidad o peso específico constante, el centro de gravedad coincide con el centroide del cuerpo. El centroide para líneas, áreas y volúmenes compuestos puede encontrarse con relaciones análogas a la ecuación anterior; sin embargo, a las ***W*** las reemplazan las ***L´, A´, V´***, respectivamente.

Ejemplo:

Localizar el centroide del área de la placa que se muestra en la **Figura 12**:

Figura 12. Ejemplo centroide del área compuesta

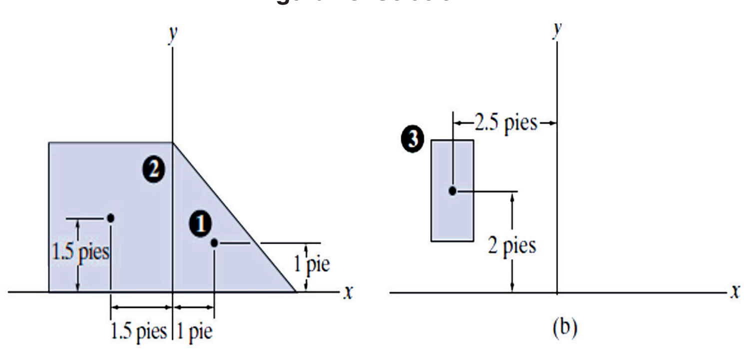


Fuente: Hibbeler (2010, p. 473).

Solución

Como primer paso, se determina cada una de las figuras que componen la placa, que en este caso está dividida en 3 segmentos: cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo, y se identifica un área negativa (rectángulo pequeño elemento 3) puesto que se debe restar del cuadrado más grande (elemento 2).

Figura 13. Solución



Fuente: Hibbeler (2010, p. 473).

El paso siguiente es localizar los **brazos de momento**, es decir, el centroide de cada segmento. Observa que las coordenadas $\tilde{x}$ de 2 y 3 son *negativas.*

Sumatorias: con los datos de la **Figura 13**, los cálculos se tabulan de la siguiente manera:

Cuadro 1. Cálculos

Segmento	A (pie²)	$\tilde{x}$ (pie)	$\tilde{y}$ (pie)	$\tilde{x}$A (pie³)	$\tilde{y}$A (pie³)
1	$\frac{1}{2}(3)(3)=4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	- 1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	- 2.5	2	5	-4
	$\sum A=11.5$			$\sum \tilde{x}A = -4$	$\sum \tilde{y}A = 14$

Por consiguiente:

$$\tilde{x} = \frac{\sum \tilde{x}A}{\sum A} = \frac{-4}{11.5} = -.348 \text{ pie Resp.}$$

$$\tilde{y} = \frac{\sum \tilde{x}A}{\sum A} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ pie Resp.}$$

Como podrás darte cuenta, el análisis del centro de gravedad de un cuerpo o de un sistema de fuerzas es útil porque facilita resolver problemas de mecánica en los que es preciso obtener un equilibrio y estabilidad del cuerpo. Dentro de la arquitectura, podemos encontrar su aplicación al considerar las fuerzas ejercidas sobre una viga o una placa plana, como losetas.

REFERENCIAS

Hibbeler, R. (2010). *Ingeniería mecánica. Estática.* México: Pearson. Recuperado de https://pavisva.files.wordpress.com/2016/01/estc3a1tica-de-russel-hibbeler-12va-edicic3b3n.pdf

Meriam, J. y Kraige, L. (1999). *Mecánica para ingenieros. Estática.* España: Reverté. Recuperado de https://www.academia.edu/36717504/Mecanica_para_Ingenieros_Estatica_3ed_Meriam_and_Kraige

Zapata, F. (2019). *Centro de gravedad: propiedades, cálculo, ejemplos.* Recuperado de: https://www.lifeder.com/centro-de-gravedad/